# ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟ ΤΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

*Π. ΚΟΥΝΑΒΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ M.Sc.*

*Δ. ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ ΔΡ. ΦΥΣΙΚΟΣ*

# Παρουσίαση

Με την διδασκαλία αυτή θα παρουσιάσουμε μια διαισθητική προσέγγιση των εννοιών: ρυθμός μεταβολής ,παράγωγος και ορισμένο ολοκλήρωμα ενώ θα διευκολύνουμε ταυτόχρονα την κατανόηση των βασικών αρχών της Κινηματικής. Μέσω δραστηριοτήτων οργάνωσης πραγματικών φαινομένων κίνησης επιδιώκοντας να ανακαλύψουν οι μαθητές το φυσικό νόημα του μέσου και στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής. Αρχικά, το γράφημα **s-t** μοντελοποιεί μία συγκεκριμένη κατάσταση, την κίνηση ενός μαθητή. Μετά χρησιμοποιείται για να ερμηνεύσει την στιγμιαία ταχύτητα σε μη ομαλή κίνηση. Όταν το γράφημα **s-t** είναι καμπύλη γραμμή καθοδηγούνται οι μαθητές να ανακαλύψουν ότι η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την κλίση της εφαπτομένης και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής ( παράγωγο ) της συνάρτησης **s(t)** . Με την αντίστροφη διαδικασία, δηλ. την εύρεση της απόστασης από το γράφημα **v-t** , δίδεται νόημα στο ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδόν. Ταυτόχρονα, ενισχύεται η οπτικοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων της παραγώγου, μέσω του λογισμικού Geogebra.

# Διδακτική

Η διδακτική που θα ακολουθήσουμε περιλαμβάνει δραστηριότητες με την ταχύτητα, την απόσταση, την επιτάχυνση και τις γραφικές τους παραστάσεις. Στην 1$^{η}$ ενότητα που έχει τίτλο ΄΄ Εισαγωγή στην έννοια της παραγώγου ΄΄ επιδιώκουμε να μάθουν οι μαθητές, υπολογίζοντας την κλίση του γραφήματος **s-t** της απόστασης, να βρίσκουν την ταχύτητα και να σχεδιάζουν το γράφημα της **v - t.** Στη συνέχεια, από το γράφημα **v - t** της ταχύτητας , να βρίσκουν την επιτάχυνση και να σχεδιάζουν το γράφημα της **α**- **t**. Στην 2$^{η}$ ενότητα που έχει τίτλο ΄΄ Εισαγωγή στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ΄΄ θα χρησιμοποιήσουμε το γράφημα **v – t** για την εισαγωγή στον Ολοκληρωτικό Λογισμό μέσω της εύρεσης αθροισμάτων και εμβαδών.

# 1$^{Η}$ ΕΝΟΤΗΤΑ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

# 1$^{η}$ Δραστηριότητα

- Ένας μαθητής προχωρά με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος μιας ευθείας αρχικά διανύει 4m σε 2 sec , σταματά για 3 sec και στη συνέχεια επιστρέφει στην αφετηρία σε 1 sec .
- Ζητείται να αναπαραστήσουν την κίνηση γραφικά ( γράφημα **s-t,** **(**σχήμα 1α) και στη συνέχεια να σχεδιάσουν το γράφημα της **v – t** ( σχήμα 1β ).
- **Επιδιωκόμενοι στόχοι:**
- 1. να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι μία πραγματική κατάσταση ( εδώ το φυσικό φαινόμενο κίνησης ) μπορεί να αναπαρασταθεί οπτικά με το γράφημα μιας συνάρτησης . ( Η συνάρτηση ως μοντέλο μιας κατάστασης)
- 2. να συνδέσουν την σταθερή ταχύτητα σε κάθε χρονικό διάστημα με την κλίση του γραφήματος **s-t** , δηλ. v = Δs/Δt = εφω = κλίση του **s-t** ( Σχήμα 1α).

# $2^η$ Δραστηριότητα

- Δίνεται το γράφημα **s-t** ( μοντέλο μιας κίνησης ) όπου φαίνεται και η κλίση του σε κάθε υποδιάστημα (σχήμα 2α) και ζητείται να ερμηνεύσουν το είδος της κίνησης και να γίνει το γράφημα **v – t** ( Σχήμα 2β).
- Οι παραπάνω δραστηριότητες θέτουν τα θεμέλια για να αρχίσουν να διακρίνουν τη σχέση **μεταξύ κλίσης** του γραφήματος **s-t** και **ταχύτητας .** Μετά θα επισημάνουμε ότι η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της απόστασης ως προς το χρόνο και συμβολίζεται με s΄(t) ή ds/dt .
- Ξεκινάμε με το πλαίσιο της ομαλής ευθύγραμμης κίνησης της οποίας το γράφημα **s-t** χρησιμοποιείται ως μοντέλο , δηλ. ως ένα μέσον, για την μοντελοποίηση μιας κατάστασης και την κατανόηση του ρυθμού μεταβολής και της παραγώγου συνδέοντας αυτές τις έννοιες με την ταχύτητα. Το απλό γράφημα **s-t** θέλουμε να αποτελεί σημείο αναφοράς ( **μοντέλο s-t** ) στο οποίο θα καταφεύγουν οι μαθητές για να σκεφτούν την **ταχύτητα** ως **κλίση- ρυθμό μεταβολής – παράγωγο** της συνάρτησης s(t). Θεωρούμε ότι με αυτόν τον τρόπο θα αποκτήσει νόημα η έννοια της παραγώγου και η σύνδεσή της με τα φαινόμενα από τα οποία προέκυψε και τα οποία οργανώνει.

# $3^{η}$ Δραστηριότητα

- Εισάγουμε τον προβληματισμό της εύρεσης της ταχύτητας όταν το γράφημα **s-t είναι καμπύλη** ( κίνηση μεταβαλλόμενη ).
- Συγκεκριμένα, δίδεται το παρακάτω γράφημα **s-t** που παριστάνει την κίνηση ενός ποδηλάτη και πρέπει οι μαθητές να υπολογίσουν την ταχύτητα στο σημείο Α.
- Η διαφορά της στιγμιαίας από τη μέση ταχύτητα επισημαίνεται με την **Υπόδειξη:** *Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού είναι η ταχύτητά του την τυχαία χρονική στιγμή t. Στην ομαλή κίνηση η μέση ταχύτητα $v_{μ}$ και η στιγμιαία v συμπίπτουν. Όταν η κίνηση δεν είναι ομαλή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα προσεγγίζεται από τη μέση ταχύτητα σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Έτσι, αν συμβολίσουμε με dt την πολύ μικρή μεταβολή του χρόνου και ds την αντίστοιχη μεταβολή της απόστασης τότε το πηλίκο ds /dt μας δίνει την στιγμιαία ταχύτητα v, δηλ. **v = ds/dt**. Στο σχήμα 1 α ( ταχύτητα σταθερή σε κάθε υποδιάστημα ) είναι $v_{μ}$ = v αφού* Δs/Δt = ds/dt = εφω *.*
- ***Στην ομαλή κίνηση η μέση ταχύτητα είναι ίση με την στιγμιαία.***

Επιδιώκουμε να εμπεδώσουν οι μαθητές ότι:

- 1. **Η μέση ταχύτητα $v_{\mu}$ =** ισούται με την κλίση ( εφα ) της τέμνουσας ΑΜ ( σχήμα 3β ) και εκφράζει το **μέσο ρυθμό μεταβολής .**
- 2. **Η στιγμιαία ταχύτητα v =** ισούται με την κλίση της οριακής θέσης της τέμνουσας ( το Μ προσεγγίζει το Α ), δηλ. με την κλίση (εφω) της εφαπτομένης ε στο Α (σχήμα 3γ ) και εκφράζει το **στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής .**

## Η έννοια της επιτάχυνσης

Η έννοια της επιτάχυνσης δείχνει πόσο γρήγορα αυξάνει ή μειώνει την ταχύτητά του ένα σώμα, άρα εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος .

- **4η Δραστηριότητα**
- Το γράφημα **v-t** της ταχύτητας σε ευθύγραμμη , ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ( Σχήμα 4 α) και ζητείται να σχεδιάσουν το γράφημα **α – t** της επιτάχυνσης ( Σχήμα 4β).
- **Αναμένουμε από τους μαθητές να σκεφτούν ότι:** η επιτάχυνση ισούται με την μεταβολή της ταχύτητας Δν προς τον αντίστοιχο χρόνο Δt ( α = Δν/Δt ) , άρα σε κάθε υποδιάστημα ισούται με **την κλίση της γραφικής παράστασης v – t** (Σχήμα 4 α). Υπολογίζουν την κλίση και σχεδιάζουν το διάγραμμα **α – t** (Σχήμα 4β).

# $5^η$ Δραστηριότητα

- Ζητείται να υπολογίσουν την στιγμιαία επιτάχυνση στο σημείο Α, όταν το γράφημα **v-t** είναι καμπύλη γραμμή (Σχήμα 5 ).
- *Αναμένουμε να εργαστούν με τον τρόπο που έμαθαν στη $3^η$ δραστηριότητα. Έτσι ελέγχουμε αν αφομοίωσαν την έννοια της παραγώγου και ταυτόχρονα ενισχύεται η σύνδεση των ταυτόσημων πτυχών της ( κλίση – ρυθμός μεταβολής – διαφορικό πηλίκο ).*
- **Υπόδειξη: Η στιγμιαία επιτάχυνση** ορίζεται ως η μέση επιτάχυνση σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Αφού η μέση επιτάχυνση στη μετακίνηση από το Α στο Μ ( Σχήμα 5α) ισούται με **dv/dt ,** για να βρούμε την στιγμιαία επιτάχυνση στο Α παίρνουμε την μεταβολή στο χρόνο όλο και ποιο μικρή. Αν συμβολίσουμε με **dt** την πολύ μικρή μεταβολή του χρόνου και **dv** την αντίστοιχη μεταβολή της ταχύτητας, τότε το πηλίκο **dv/dt** μας δίνει την ( στιγμιαία ) επιτάχυνση . Όταν το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση τότε η μέση επιτάχυνση και το πηλίκο **dv/dt** συμπίπτουν.
- **Επισήμανση: Η επιτάχυνση α(t)** εκφράζει τον **ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας .** Ισούται με την κλίση της καμπύλης **v – t** , δηλ. την παράγωγο της συνάρτησης **v(t)** και συνεπώς την δεύτερη παράγωγο της **s(t)** . Συμβολίζουμε: **α(t) = v΄(t) = s΄΄(t).**

# $2^{Η}$ ΕΝΟΤΗΤΑ
# ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Στην $2^{η}$ ενότητα συνδέουμε την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με την εύρεση της απόστασης από το γράφημα **v- t.**

- **$6^{η}$ Δραστηριότητα**
- Δίνεται το γράφημα **v- t** ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα v = 3m/sec ( Σχήμα 6 ). Ζητείται η διανυθείσα απόσταση **s** .
- *Επιδιώκουμε να δουν ότι από τον τύπο v =s/t προκύπτει s=v.t=4.3= 12 = Εμβαδόν Ορθογωνίου, με βάση t και ύψος v , άρα s = E. Αυτό το απλό γράφημα της ομαλής κίνησης θέλουμε να αποτελεί σημείο αναφοράς ( μοντέλο v-t ) όπου θα καταφεύγουν για να σκεφτούν την απόσταση ως εμβαδόν.*

## 7η Δραστηριότητα

- Περιγράφεται το αντίστροφο πρόβλημα της 1ης δραστηριότητας , δηλ. δίνεται το γράφημα **v-t** της ταχύτητας (Σχήμα 7α) με την οποία κινείται ο μαθητής και ζητείται το διανυόμενο διάστημα και το γράφημα **s-t** (Σχήμα 7β).
- *Αναμένουμε να δουν ότι το γράφημα* **s-t** που προκύπτει είναι το ίδιο με αυτό του σχήματος 1α. Αυτή η δραστηριότητα προετοιμάζει την αντίληψη ότι η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες διαδικασίες .

# $8^{Η}$ Δραστηριότητα

- Δίνεται το γράφημα της ταχύτητας **v – t** , μιας ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης, όπου **v(t) = 10t** (σχήμα 8 ). Ζητείται η απόσταση που διήνυσε το κινητό μετά από 5 sec.
- **Υπόδειξη:** *Διαιρέστε το χρονικό διάστημα t =5sec σε 10 υποδιαστήματα πλάτους Δt = 0,5sec*. Η ταχύτητα σε κάθε υποδιάστημα θεωρείται σταθερή και ίση με την αρχική ταχύτητα σε αυτό. α) Υπολογίστε τη μετατόπιση σε κάθε υποδιάστημα Δt . β) Προσθέστε αυτές τις μετατοπίσεις για να πάρετε μια προσέγγιση της συνολικής απόστασης . γ) Πώς μπορείτε να βρείτε μια καλύτερη προσέγγιση; δ) Πόση είναι η ακριβής απόσταση που διανύθηκε;
- *Αναμένουμε να προσεγγίσουν το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση με ράβδους σταθερών ταχυτήτων στα υποδιαστήματα Δt. Δηλ. σε κάθε μικρό διάστημα Δt, η ταχύτητα θεωρείται σταθερή ίση με Δv , άρα η αντίστοιχη απόσταση είναι:* ***Δs = Δv Δt= εμβαδόν του ορθογωνίου .*** *Αν τα χρονικά διαστήματα Δt είναι πολύ μικρά τότε ισχύει:* ***Άθροισμα των εμβαδών των ράβδων  εμβαδόν του τριγώνου*** *που περικλείεται από το γράφημα* **v – t,** την ευθεία t = 5 και τον οριζόντιο άξονα . S(t) = (t x v)/ 2 =( t x 10t )/ 2 = 5t^2

# $9^{Η}$ Δραστηριότητα

- Ζητείται να προσεγγίσουν την διανυθείσα απόσταση, στα πρώτα 8 sec, όταν το γράφημα **v – t** της ταχύτητας είναι η καμπύλη του σχήματος 9 α ( κίνηση μη ομαλά μεταβαλλόμενη ) .
- *Αναμένουμε να σκεφτούν ότι για να υπολογίσουν την απόσταση αρκεί να προσεγγίσουν το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση με ράβδους σταθερών ταχυτήτων σε μικρά χρονικά διαστήματα **dt**.*
- Η προσέγγιση του διαστήματος με ορθογώνια, όταν η ταχύτητα μεταβάλλεται οδηγεί στην ολοκλήρωση.
- Στο σημείο αυτό επισημαίνουμε ότι: το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης v(t) ( v(t) ≥ 0 ), τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες t = α και t = β εκφράζεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης v(t) από α έως β ( συμβολίζουμε $\int_a^b v(t)dt$ ) και ισούται με την απόσταση s(t) που διανύεται το χρονικό διάστημα [ α, β ] .

- Συνεπώς : s(t) = $\int_a^b v(t)dt$ = Εμβαδόν

Επιδιώκουμε να καταστεί σαφές ότι:

- 1. από το **γράφημα s – t** της απόστασης υπολογίζοντας την **κλίση** βρίσκουμε την **ταχύτητα v(t) ,** δηλ. την **παράγωγο** της συνάρτησης s(t) και , αντιστρόφως .
- 2. από το **γράφημα v – t** της ταχύτητας υπολογίζοντας το εμβαδόν βρίσκουμε την **απόσταση s(t) ,** δηλ. το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτηση **v(t) .** Η **κλίση** είναι η **παράγωγος** ενώ το **εμβαδόν** είναι το **ολοκλήρωμα.** Έτσι έχουμε μια πρώτη ( απλοποιημένη ) εισαγωγή στις έννοιες της διαφόρισης και ολοκλήρωσης , που μάλιστα δείχνει ότι είναι δύο **αντίστροφες διαδικασίες .**

**Τελικές Παρατηρήσεις**

- Χρησιμοποιήσαμε τις γραφικές παραστάσεις με μια προσέγγιση << αναδυόμενης μοντελοποίησης >> που φάνηκε να είναι χρήσιμη για την διδασκαλία των βασικών εννοιών της Ανάλυσης. Εστιάσαμε στη σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο, την κατανόηση των γραφικών παραστάσεων ως μοντέλα της κίνησης, και στη χρήση τους για εννοιολογικό μαθηματικό συλλογισμό .
- Η πειραματική διδασκαλία ενίσχυσε την αρχική μας άποψη ότι οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να διαδραματίσουν έναν διδακτικό ρόλο στην κατανόηση των εννοιών της Φυσικής και της Ανάλυσης . Συνδέουν τις έννοιες με τα φαινόμενα στα οποία αναφέρονται και ταυτόχρονα βοηθούν στην διευκρίνιση των εννοιών που περιγράφουν.

**΄΄ Όποιος τολμάει να διδάξει, δεν πρέπει ποτέ να πάψει να μαθαίνει .΄΄**

John Cotton Dana